TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 347, Number 12, December 1995

COURBURES SCALAIRES DES VARIÉTÉS D'INVARIANT CONFORME NÉGATIF

ANTOINE RAUZY

ABSTRACT. In this paper, we are interested in the problem of prescribing the scalar curvature on a compact riemannian manifold of negative conformal invariant. We give a necessary and sufficient condition when the prescribed function f is nonpositive. When $\sup(f) > 0$, we merely find a sufficient condition. This is the subject of the first theorem. In the second one, we prove the multiplicity of the solutions of subcritical (for the Sobolev imbeddings) elliptic equations. In another article [8], we will prove the multiplicity of the solutions of the prescribing curvature problem, i.e. for a critical elliptic equation.

Cet article est le premier d'une série de deux; on donne ici la démonstration de résultats parus dans la note à l'Académie des Sciences [7]. On s'intéresse au problème de la courbure scalaire prescrite dans le cas d'une variété riemannienne d'invariant conforme négatif. On démontre une condition nécessaire et suffisante pour que le problème admette une solution lorsque la fonction prescrite f est négative ou nulle. Lorsque $\sup f > 0$, on n'obtient plus que des conditions suffisantes (même si l'on démontre que l'une d'entre elles est nécessaire). Ces résultats font l'objet du Théorème 1. Un second théorème prouve la multiplicité des solutions d'équations elliptiques sous-critiques (relativement aux inclusions de Sobolev).

Dans le second article [8], on s'intéressera à la multiplicité des solutions du problème de courbure prescrite qui conduit à une équation elliptique dont l'exposant est, cette fois, critique.

I. Position du problème

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n, $n \geq 3$. On suppose M compacte et telle que l'invariant conforme μ soit négatif

$$\mu = \inf_{u \not\equiv 0,\, u \geq 0} \frac{\frac{4(n-1)}{n-2} \int_M |\nabla u|^2 + \int_M R u^2}{[\int_M u^{2n/(n-2)}]^{(n-2)/n}}$$

où R est la courbure scalaire de M. On considère le problème suivant: étant donnée une fonction f continue sur M, existe-t-il une transformation conforme de la métrique $g \to g' = u^{4/(n-2)} g$, $u > 0$, telle que f soit la courbure scalaire de la variété (M, g') ?

Received by the editors March 30, 1994.
1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 53C42; Secondary 58G03.

A une transformation conforme près (de la métrique), puisque μ est négatif, on peut toujours considérer (M, g) comme une variété de courbure scalaire constante $R < 0$ et de volume 1, ce que l'on fera dorénavant.

Analytiquement on cherche une solution de l'équation

$$\Delta u + \frac{n-2}{4(n-1)} R u = \frac{n-2}{4(n-1)} f u^{(n+2)/(n-2)} \quad \text{où } u > 0. \tag{1}$$

On s'intéresse au cas particulier où f change de signe sur M. En effet, si f est une constante négative, l'équation (1) admet une solution constante évidente et Aubin [3, p. 135] a montré que cette solution était unique. Le cas $f < 0$ a été entièrement traité par Aubin [2] par une méthode variationnelle, il a montré que si $f < 0$ sur M, l'équation (1) admet une unique solution. Kazdan-Warner [4] et [5] ont retrouvé ce résultat par une méthode de sur et sous-solutions. Cependant ces deux démonstrations ne peuvent pas être utilisées lorsque f s'annule ou change de signe.

Kazdan et Warner [4] ont prouvé d'autre part trois propositions qui s'appliquent dans le cas général:

1. Pour que l'équation (1) admette une solution, il est nécessaire que $\int_M f$ soit strictement négative.
2. Il existe des fonctions f C^∞ sur M qui satisfont $\int_M f < 0$, sans que l'équation (1) n'admette de solution.
3. Si l'équation (1) admet une solution pour une fonction f, elle admet aussi une solution pour toute fonction f' vérifiant $f' \leq f$.

Dans tout ce qui suit on supposera donc $\int_M f < 0$.

Lorsque f s'annule ou change de signe, la situation peut être très différente du cas $f < 0$. Dans ce cas, les auteurs qui se sont intéressés au problème s'écartent de la question géométrique en cherchant pour quelles valeurs de λ, l'équation

$$\Delta u - \lambda u = f u^{(n+2)/(n-2)} \tag{E_λ}$$

admet une solution positive (f étant une fonction C^∞ sur M, qui s'annule ou change de signe).

Les premiers, Kazdan et Warner ont montré que si f est strictement positive en au moins un point, alors il existe une valeur maximale λ_0 de λ telle que:

si $0 < \lambda < \lambda_0$, (E_λ) admet une solution,

si $\lambda > \lambda_0$, (E_λ) n'a pas de solution.

Ouyang [6], Vazquez et Véron [9] ont montré que cette valeur limite existait aussi si le maximum de f est nul. Cette étude analytique de l'équation (E_λ) se traduit pour le problème géométrique par les résultats suivants pour l'équation (1):

Pour f donnée, on pose

$$M_1 = \{x \in M / f(x) \geq 0\},$$

$V(M_1)$: l'ensemble des variétés à bord incluses dans M_1, on suppose $V(M_1)$ non vide. On définit la grandeur géométrique $\lambda_1 = \inf_\Omega \lambda_\Omega$ où λ_Ω est la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet associé à Ω, Ω parcourant $V(M_1)$. Si M_1 est lui-même une variété à bord, $\lambda_1 = \lambda_{M_1}$. Vazquez et Véron ont montré le théorème suivant obtenu pour une fonction f qui s'annule sans changer de signe:

Théorème.
Si $|R| < \frac{4(n-1)}{n-2}\lambda_1$, *l'équation* (1) *admet une unique solution non triviale.*
Si M_1 *est une variété à bord, on a le résultat complet suivant:*
si $|R| < \frac{4(n-1)}{n-2}\lambda_1$, *l'équation* (1) *admet une unique solution non triviale.*
si $|R| \geq \frac{4(n-1)}{n-2}\lambda_1$, *l'équation* (1) *n'admet pas de solution non identiquement nulle.*

Lorsque f est strictement positive en un point, on n'a plus que le résultat suivant:

Théorème. *Soit* f C^∞ *sur* M, $f > 0$ *en un point de* M, *alors il existe* $\lambda_0 \geq \lambda_1$ *tel que si* $|R| > \frac{4(n-1)}{n-2}\lambda_0$, *l'équation* (1) *n'admet pas de solution non triviale.*

Mentionnons enfin que T. Ouyang énonce le théorème suivant (dont la démonstration n'a pas paru).

Soit λ_0 le maximum des valeurs de λ tel que l'équation (E_λ) admette une solution. Si $\sup f > 0$ et $\lambda < \lambda_0$, (E_λ) admet plusieurs solutions. Elle n'en admet qu'une lorsque $\lambda = \lambda_0$. Si $\sup f = 0$, l'équation (E_{λ_0}) n'admet pas de solution non triviale.

Ainsi, lorsque f change de signe on ne dispose plus que de conditions nécessaires à l'existence de solutions de l'équation (1). On est donc amené à rechercher des conditions suffisantes sur f. Dans ce but, on utilise une méthode variationnelle du type de celle de Yamabe. On s'aperçoit cependant que la fonctionnelle classique

$$\frac{\frac{4(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 + \int_M Ru^2}{[\int_M fu^{2n/(n-2)}]^{(n-2)/n}}$$

ne convient pas ici, et qu'il est préférable de la modifier quelque peu. En effet cette fonctionnelle n'est pas minorée a priori. Lorsqu'on impose des contraintes de façon à obtenir un minimum, les multiplicateurs de Lagrange que l'on introduit sont difficiles à contrôler.

Par cette méthode, on trouve des conditions suffisantes pour que l'équation (1) admette des solutions lorsque f change de signe, de plus lorsque f s'annule sans changer de signe ces conditions sont nécessaires. La démonstration permet de retrouver les résultats d'existence de Kazdan et Warner ainsi que ceux de Ouyang et Vazquez-Véron.

Par ailleurs on prouve que sous certaines hypothèses, l'équation

$$\Delta u + \frac{n-2}{4(n-1)}Ru = \frac{n-2}{4(n-1)}fu^{q-1}, \tag{2}$$

où q est inférieur à l'exposant critique de Sobolev $\frac{2n}{n-2}$, admet au moins deux solutions.

Notations. On pose:
(a) $\widetilde{R} = \frac{n-2}{4(n-1)}R$, $\widetilde{R} < 0$.
(b) $N = \frac{2n}{n-2}$, n dimension de la variété.
(c) $\| \|_p$ désigne la norme dans L_p ; H_1^2 est l'espace de Sobolev des fonctions de L_2, dont le gradient est dans L_2.
(d) K_1 et A_1 sont deux constantes telles que $\forall u \in H_1^2(M)$, on ait:

$$\|u\|_N^2 \le K_1 \|\nabla u\|_2^2 + A_1 \|u\|_2^2.$$

(e) $f^- = \inf(f, 0)$ et $f^+ = \sup(f, 0)$.

II. Enoncé des résultats

Soit f une fonction C^∞ sur M. On définit

$$\lambda_f = \inf_{u \in \mathscr{A}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int |u|^2}$$

avec $\mathscr{A} = \{u \in H_1^2, u \ge 0, u \not\equiv 0$ telle que $\int_M |f^-| u = 0\}$.
$\lambda_f \in \overline{\mathbb{R}}$, et si $\mathscr{A} = \varnothing$, on pose $\lambda_f = +\infty$.

II.1. Equation critique.

Théorème 1. *Il existe une constante C strictement positive, qui ne dépend que de $f^- / \int f^-$, telle que si f C^∞ sur M vérifie les conditions suivantes:*

$$|R| < \frac{4(n-1)}{n-2} \lambda_f, \tag{1}$$

$$\frac{(\sup f^+)}{\int |f^-|} < C, \tag{2}$$

l'équation (1) *admet une solution partout positive. f est alors la courbure scalaire d'une métrique conforme à g. La condition* (1) *est nécessaire.*

Remarque 1. La condition (1): $|R| < \frac{4(n-1)}{n-2} \lambda_f$ est toujours nécessaire. Dans le cas particulier où f s'annule sans changer de signe, c'est-à-dire $f^+ \equiv 0$, la condition (2) est toujours vérifiée, la condition (1) devient donc nécessaire et suffisante.

Remarque 2. On retrouve les conditions d'existence de solutions de Kazdan et Warner, et de Vazquez-Véron. On a en effet le résultat suivant:

Lemme 1. *Pour une fonction f C^∞ telle que $M_1 = \{x \in M / f(x) \ge 0\}$ soit une variété à bord, les deux réels λ_1, première valeur propre du laplacien du problème de Dirichlet associé à M_1, et λ_f, introduit ci-dessus, coïncident.*

De plus on verra qu'il est naturel de poser $\lambda_f = +\infty$ lorsque $M_1 = \{x \in M / f(x) \ge 0\}$ est de mesure nulle. Ainsi pour $f \le 0$, $\sup f^+ = 0$ et la condition (2) du théorème est vérifiée; pour $f < 0$, $\lambda_f = +\infty$ et la condition (1) est vérifiée. Les théorèmes d'existence précédents sont compris dans l'énoncé du théorème 1.

Remarque 3. On obtient immédiatement des exemples de fonctions f C^∞ permettant d'obtenir des solutions en remarquant que

$$\int_{f \ge 0} 1 < \left[A_1 + K_1 \frac{n-2}{4(n-1)} |R| \right]^{-n/2} \quad \text{implique} \quad \lambda_f > \frac{n-2}{4(n-1)} |R|.$$

(Voir lemme 2.) A_1 et K_1 sont les constantes des inégalités de Sobolev.

II.2. Equation sous-critique. Si l'exposant de l'équation (2) n'est pas critique, c'est-à-dire lorsque $q \in]2, \frac{2n}{n-2}[$, on obtient le théorème suivant:

Théorème 2. *Pour toute fonction f C^∞ sur M, il existe une constante C_q strictement positive, qui ne dépend que de $f^- / \int f^-$, telle que si f vérifie les conditions suivantes:*

$$(1)\quad |R| < \frac{4(n-1)}{n-2}\lambda_f,$$

$$(2)\quad (\sup f^+)/\int |f^-| < C_q,$$

$$(3)\quad \sup f > 0,$$

alors l'équation (2) *admet deux solutions distinctes non identiquement nulles.*

Pour un exposant q non critique, on peut résumer la situation ainsi: on cherche à minimiser une fonctionnelle F_q pour des fonctions de norme fixée dans L_q. Soit k cette norme, $\mu_{k,q}$ le minimum.

$$F_q(u) = \int |\nabla u|^2 + \widetilde{R}\int u^2 - \int f u^q \quad \text{où } q \in]2, N[,$$

u est une fonction qui appartient à l'ensemble

$$\mathscr{B}_{k,q} = \{u \in H_1^2,\, u \geq 0,\, \|u\|_q^q = k\}$$

et on note $\mu_{k,q} = \inf_{u\in\mathscr{B}_{k,q}} F_q(u)$.

On obtient trois types de courbes $\mu_{k,q}(k)$:

Le premier cas correspond à une fonction f telle que $f < 0$, ou $f \leq 0$ et $\int_{f=0} \mathbf{1} = 0$, ou $f \leq 0$ et $\lambda_f > \frac{n-2}{4(n-1)}|R|$, la courbe $k \to \mu_{k,q}(k)$ part de 0, décroît passe par un minimum négatif puis croît et tend vers $+\infty$ avec k.

Le deuxième type correspond à des fonctions telles que $\sup f > 0$. Cette fois la courbe $k \to \mu_{k,q}(k)$ part de 0, décroît passe par un minimum négatif puis croît passe par un maximum et finalement tend vers $-\infty$ avec k. On montre ici que dans le cas où ce maximum est positif on obtient deux solutions pour l'équation (2).

Le troisième type, dont on ne montre pas l'existence, représente les cas où l'on ne peut pas minimiser la fonctionnelle. La courbe $k \to \mu_{k,q}(k)$ part de 0, ne cesse de décroître et tend vers $-\infty$ avec k. On ne peut donc rien conclure par la méthode utilisée ici.

III. Etude de λ_f. Condition nécessaire

III.1. Démonstration du lemme 1. Le lemme 1 énonçait: pour une fonction f C^∞ telle que $M_1 = \{x \in M / f(x) \geq 0\}$ soit une variété à bord, les deux réels λ_1 et λ_f, coïncident. Supposons donc que M_1 soit une variété à bord. On a $\lambda_f = \inf_{u\in\mathscr{A}} \int |\nabla u|^2 / \int |u|^2$. Avec $\mathscr{A} = \{u \in H_1^2,\, u \geq 0,\, u \not\equiv 0$ telle que $\int_M |f^-| u = 0\}$. λ_1, tel qu'il est introduit par Ouyang et Véron, est défini par

$$\lambda_1 = \inf_{u\in\mathscr{A}'} \frac{\int_{M_1} |\nabla u|^2}{\int_{M_1} |u|^2},$$

avec $\mathscr{A}' = \{u \in C^\infty,\, u > 0 \text{ sur } M_1,\, u = 0 \text{ sur } \partial M_1\}$.

Immédiatement on a l'inclusion de $\mathscr{A}'$ dans $\mathscr{A}$, donc $\lambda_f \leq \lambda_1$. Or une étude classique montre que λ_f est atteint, et d'après les théorèmes de régularité, une fonction qui réalise ce minimum est C^∞ sur M_1. Il existe donc u_0 continue telle que $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$ et

$$\int_M |f^-| u_0 = 0, \text{ qui vérifie } \frac{\int_M |\nabla u_0|^2}{\int_M |u_0|^2} = \lambda_f.$$

Donc $u_0 \in \mathscr{A}'$ et $\lambda_f = \lambda_1$.

III.2. Estimation de λ_f. De la définition de λ_f, on déduit deux propriétés réunies ici sous la forme d'un lemme:

Lemme 2. (1) *Pour tout ε donné, il existe des fonctions f telles que $\lambda_f < \varepsilon$.*

(2) *Lorsque $\int_{f\geq 0} \mathbf{1}$ tend vers zéro (f étant considérée ici comme variable), λ_f tend vers l'infini. En particulier la condition*

$$\int_{f\geq 0} \mathbf{1} \leq \left[A_1 + K_1 \frac{n-2}{4(n-1)} |R|\right]^{-n/2} \quad \textit{implique} \quad \lambda_f > |\widetilde{R}|.$$

Démonstration. (1) Considérons une fonction f_η strictement négative sur une boule de centre x_0, de rayon η, $B(x_0, \eta)$, f_η étant positive ou nulle en dehors de cette boule. Soit u_η une fonction radiale qui vaut 1 à l'extérieur de la boule de centre x_0, de rayon 2η, zéro à l'intérieur de $B(x_0, \eta)$, u_η étant continue et affine pour $r \in [\eta, 2\eta]$. Alors $\lambda_{f_\eta} \leq \int_M |\nabla u_\eta|^2 / \int_M |u_\eta|^2$. Comme les coefficients de la métrique sont bornés, il existe deux constantes positives c et c' telles que, η étant une constante positive:

$$\lambda_{f_\eta} \leq c \frac{\int_\eta^{2\eta} \frac{1}{\eta^2} r^{n-1} dr}{1 - \eta^n c'} \leq c \frac{2^n - 1}{n} \frac{\eta^{n-2}}{1 - \eta^n c'}.$$

Ainsi λ_{f_η} tend vers zéro avec η.

(2) Pour montrer la deuxième propriété on utilise l'inégalité de Hölder

$$\int_{f\geq 0} |u|^2 \leq \left[\int_{f\geq 0} u^N\right]^{2/N} \left[\int_{f\geq 0} \mathbf{1}\right]^{(N-2)/N}.$$

Considérons des fonctions de $\mathscr{A}$ d'après l'inégalité de Sobolev

$$\|u\|_N^2 \leq K_1 \|\nabla u\|_2^2 + A_1 \|u\|_2^2.$$

$\int_{f\geq 0} |u|^2 \leq [\int_{f\geq 0} \mathbf{1}]^{(N-2)/N} (K_1 \|\nabla u\|_2^2 + A_1 \|u\|_2^2)$. Ainsi puisque $\frac{N-2}{N} = \frac{2}{n}$

$$\lambda_f \geq \frac{1}{K_1} \left[\left(\int_{f\geq 0} \mathbf{1}\right)^{-2/n} - A_1\right].$$

Donc, lorsque $\int_{f\geq 0} \mathbf{1}$ tend vers zéro, λ_f tend vers l'infini, on en déduit

$$\int_{f\geq 0} \mathbf{1} \leq \left[A_1 + K_1 \frac{n-2}{4(n-1)} |R|\right]^{-n/2} \quad \text{implique} \quad \lambda_f > |\widetilde{R}|.$$

De cette propriété et du théorème 1, on déduit le lemme suivant:

Lemme 3. *Dans la classe conforme d'une métrique à courbure scalaire constante négative, il existe toujours une métrique dont la courbure scalaire change de signe.*

III.3. Condition nécessaire. Soit $M_1 = \{x \in M / f(x) \geq 0\}$, si $M_1 = \varnothing$, $\lambda_f = +\infty$, la condition est inutile. Si $M_1 = M$, $\lambda_f = 0$ et l'équation (1) n'a effectivement pas de solution.

Si $M_1 \neq \varnothing$, soit Ω un ouvert à bord C^∞ tel que $M_1 \subset \Omega$, soit Ω' un ouvert à bord C^∞ vérifiant $M_1 \subset \Omega' \subset \Omega$ et $\partial\Omega' \cap \partial\Omega = \varnothing$. Soit η une fonction plateau qui vaut 1 sur Ω', à support dans Ω et u une fonction de $\mathscr{A}$, alors $\eta u \in \mathscr{A}$, mais aussi $\eta u \in \overset{\circ}{H}{}_1^2(\Omega)$. On a donc $\|\nabla\eta u\|_2^2 = \int |\nabla\eta|^2 u^2 + 2\int(\nabla\eta \cdot \nabla u)\eta u + \int |\nabla u|^2\eta^2$. Or $\nabla\eta$ est borné et vaut 0 sur Ω' et $u = 0$ presque partout sur $M\backslash\Omega'$ donc $\int |\nabla\eta|^2 u^2 = 0$ et $\int(\nabla\eta \cdot \nabla u)\eta u = 0$ car $\eta u \nabla\eta = 0$ presque partout sur M et $\nabla u \in L^2$. Mais par ailleurs $\|\eta u\|_2^2 = \|u\|_2^2$ donc $\lambda_f = \inf_{u\in\mathscr{B}(\Omega)} \int |\nabla u|^2 / \int |u|^2$, avec $\mathscr{B}(\Omega) = \{u \in \overset{\circ}{H}{}_1^2(\Omega), u \geq 0, u \not\equiv 0$ telle que $\int_M |f^-|u = 0\}$.

Si on considère alors Ω_j une suite d'ouverts emboîtés vérifiant

(1) Ω_j est un ouvert à bord C^∞ contenant M_1,

(2) $\forall x \in M$ tel que $f(x) < 0$, il existe J tel que $x \in \Omega_J$,

on peut définir en reprenant les notations de Vazquez-Véron:

$$\lambda_{\Omega_j} = \inf_{u\in\mathscr{A}_j} \int |\nabla u|^2 \Big/ \int |u|^2, \quad \text{avec } \mathscr{A}_j = \{u \in \overset{\circ}{H}{}_1^2(\Omega_j),\ u \geq 0,\ \|u\|_2^2 = 1\}.$$

On a $\mathscr{B}(\Omega_j) \subset \mathscr{A}_j$ donc $\lambda_f \geq \lambda_{\Omega_j}$.

Par conséquent, si $\forall j$, $v_j \geq 0$ est une fonction propre du laplacien pour le problème de Dirichlet associé à Ω_j de norme L^2 égale à 1, les v_j forment une suite bornée de $H_1^2(M)$, donc à une sous-suite près convergent faiblement vers une fonction v lorsque j tend vers l'infini. Les v_j convergent aussi fortement dans L^2 et presque partout vers la même fonction v d'où $\lim_{j\to\infty} \lambda_{\Omega_j} \geq \int |\nabla v|^2$. D'autre part pour tout x de M tel que $f(x) < 0$, $v(x) = 0$. On en déduit $v \in \mathscr{A}$ et $\lim_{j\to\infty} \lambda_{\Omega_j} = \lambda_f$.

Il est alors facile de montrer $|\widetilde{R}| \leq \lambda_f$. En effet

$$\int_{\Omega_j} \Delta v_j u - \int_{\Omega_j} \Delta u v_j = -\int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial v_j}{\partial n} u \geq 0$$

donc

$$(\lambda_{\Omega_j} + \widetilde{R}) \int_{\Omega_j} v_j u - \int_{\Omega_j} f u^{N-1} v_j \geq \inf_M u \int_{\partial\Omega_j} -\frac{\partial v_j}{\partial n} > 0$$

puisque

$$\int_{\Omega_j} \Delta v_j = \int_{\partial\Omega_j} -\frac{\partial v_j}{\partial n}.$$

Comme lorsque j tend vers l'infini $\sup_{\Omega_j}(f) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim \lambda_{\Omega_j} + \widetilde{R} \geq 0$ et donc $\lambda_f \geq |\widetilde{R}|$.

Montrons alors l'inégalité stricte $(\lambda_f \neq |\widetilde{R}|)$.

$$|\lambda_{\Omega_j} + \widetilde{R}| \sup_M u \int_{\Omega_j} v_j > \inf_M u\ \lambda_{\Omega_j} \int_{\Omega_j} v_j + \inf_{\Omega_j}(f u^{N-1}) \int_{\Omega_j} v_j$$

et donc par passage à la limite $|\lambda_f + \widetilde{R}| \sup_M u \geq \inf_M\ u\lambda_f > 0$ ($\lambda_f > 0$ puisque f est négative en un point), on en déduit finalement $\lambda_f \neq -\widetilde{R}$.

IV. Démonstration du théorème 1

Puisqu'il est équivalent de prouver l'existence d'une solution pour l'équation (1) avec la fonction f ou avec αf, $\alpha > 0$, on considère la fonctionnelle:

$$F_q(u) = \int |\nabla u|^2 + \widetilde{R} \int u^2 - \int f u^q \quad \text{où } q \in]2, N[,$$

u est une fonction qui appartient à l'ensemble

$$\mathscr{B}_{k,q} = \{u \in H_1^2, u \geq 0, \|u\|_q^q = k\}$$

et on note $\mu_{k,q} = \inf_{u \in \mathscr{B}_{k,q}} F_q(u)$.

IV.1. $\mu_{k,q}$ est atteint. On considère une suite minimisante de fonctions de $\mathscr{B}_{k,q}$, soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\|u_j\|_q^q = k$, et $\lim_{j\to+\infty} F_q(u_j) = \mu_{k,q}$. u_j est une suite bornée dans H_1^2, car à partir d'un certain rang $F_q(u_j) \leq \mu_{k,q} + 1$, et donc $\|\nabla u_j\|_2^2 \leq \mu_{k,q} + 1 + k \sup f - k^{2/q}\widetilde{R}$ et $\|u_j\|_2^2 \leq k^{2/q}$.

Par conséquent u_j converge faiblement dans H_1^2, l'inclusion compacte de H_1^2 dans L_q et l'unicité de la limite faible permettent d'affirmer qu'une sous-suite toujours notée u_j converge fortement dans L_q vers une limite u. u vérifie:

$$\|u\|_q^q = k \quad \text{et} \quad \int \nabla u \nabla v + \widetilde{R} \int uv - \frac{q}{2} \int f u^{q-1} v = \lambda_{k,q} \int u^{q-1} v.$$

Les théorèmes de régularité montrent qu'alors u est continue. Evidemment, lorsque k tend vers zéro, $\mu_{k,q}$ tend vers zéro. On peut préciser le comportement de $\mu_{k,q}$ en zéro grâce au lemme suivant:

Lemme 4. *Lorsque k est assez proche de zéro $\mu_{k,q} < 0$.*

En effet $\mu_{k,q} \leq F_q(k^{1/q}) \leq \widetilde{R} k^{2/q} - k \int f$. Donc, pour des normes k assez petites $\mu_{k,q}$ est négatif. De plus la tangente à la courbe $k \to \mu_{k,q}$ est verticale en zéro.

Pour des normes k grandes.

Si $f < 0$, $F_q(u) \geq \widetilde{R} k^{2/q} + k|\sup f|$, on en déduit immédiatement que $\mu_{k,q}$ est positif lorsque k est assez grand.

Le cas le plus délicat est le cas $\sup f = 0$, on verra au cours de la démonstration de la proposition 2 qu'alors il existe k_0 tel que $\mu_{k,q} > 0$ pour tout $k > k_0$.

Lemme 5. *Si $\sup f > 0$, $\mu_{k,q}$ est négatif pour k assez grand. De plus $\mu_{k,q}$ est atteint pour des fonctions telles que $\int f u^q > 0$.*

En effet, si $\mu_{k,q} < \widetilde{R} k^{2/q} < 0$, une fonction u qui réalise le minimum a la propriété $\int f u^q > 0$. On considère alors une fonction v à support inclus dans l'ouvert de la variété où $f > 0$. On suppose $v \in C^1$ et $\|v\|_q^q = 1$. Alors

$$F_q(k^{1/q} v) = (\|\nabla v\|_2^2 + \widetilde{R}\|v\|_2^2) k^{2/q} - k \int f v^q.$$

Comme $\int f v^q > 0$, $F_q(k^{1/q} v) < \widetilde{R} k^{2/q}$ pour k assez grand. Donc $\mu_{k,q}$ est négatif à partir d'une certaine valeur de k.

IV.2. Continuité de $\mu_{k,q}$.

Proposition 1. *$\mu_{k,q}$ est une fonction continue de k.*

Démonstration. Pour k et k', soient u et u' des fonctions de norme 1 dans L_q telles que $F_q(k^{1/q}u) = \mu_{k,q}$ et $F_q(k'^{1/q}u) = \mu_{k',q}$. Alors

$$\mu_{k',q} - \mu_{k,q} = k^{2/q}\left[\int |\nabla u'|^2 - |\nabla u|^2 + \widetilde{R}\int u'^2 - u^2\right] - k\int f(u'^q - u^q)$$
$$+ (k'^{2/q} - k^{2/q})\left[\int |\nabla u'|^2 + \widetilde{R}\int u'^2\right] - (k'-k)\int f u'^q.$$

Comme k' est pris dans un voisinage de k, $\int |\nabla u'|^2 + \widetilde{R}\int u'^2$ et $\int f u'^q$ restent bornés. Par ailleurs, par définition de $\mu_{k,q}$, $F_q(k^{1/q}u') \geq F_q(k^{1/q}u)$.

On en déduit

$$\liminf_{k'\to k}(\mu_{k',q} - \mu_{k,q}) \geq 0.$$

Mais, en mettant k' en facteur:

$$\mu_{k',q} - \mu_{k,q} = k'^{2/q}\left[\int |\nabla u'|^2 - |\nabla u|^2 - \widetilde{R}\int u'^2 - u^2\right] - k'\int f(u'^q - u^q)$$
$$+ (k'^{2/q} - k^{2/q})\left[\int |\nabla u|^2 + \widetilde{R}\int u^2\right] - (k'-k)\int f u^q.$$

En utilisant cette fois la définition de $\mu_{k',q}$ on obtient

$$\limsup_{k'\to k}(\mu_{k',q} - \mu_{k,q}) \leq 0.$$

Par conséquent $\mu_{k,q}$ est une fonction continue de k.

IV.3. Etude de $\lambda_{f,\eta,q}$ dans le cas *e* $\int_{f\geq 0} 1 > 0$. On définit maintenant la quantité $\lambda_{f,\eta,q} = \inf_{u\in\mathscr{A}(\eta,q)} \|\nabla u\|_2^2/\|u\|_2^2$, avec

$$\mathscr{A}(\eta, q) = \left\{u \in H_1^2/u \geq 0,\ \|u\|_q^q = 1,\ \text{ et } \int |f^-|u^q = \eta\int |f^-|\right\},$$

pour un réel $\eta > 0$.

On suppose $\int_{f\geq 0} 1 > 0$ et on définit $\lambda'_{f,\eta,q} = \inf_{u\in\mathscr{A}'(\eta,q)} \|\nabla u\|_2^2/\|u\|_2^2$, avec

$$\mathscr{A}'(\eta, q) = \left\{u \in H_1^2/u \geq 0,\ \|u\|_q^q = 1,\ \text{ et } \int |f^-|u^q \leq \eta\int |f^-|\right\}.$$

$\lambda'_{f,\eta,q}$ est une fonction décroissante de η, qui est majorée par λ_f pour tout η, mais aussi par $\lambda_{f,\eta,q}$.

Soit alors une suite minimisante v_i de fonctions de $\mathscr{A}'(\eta, q)$ telle que $\|\nabla v_i\|_2^2/\|v_i\|_2^2$ tende vers $\lambda'_{f,\eta,q}$. Les v_i forment une suite bornée de H_1^2, cette suite converge faiblement dans H_1^2 donc fortement dans L_2 et L_q (à une sous-suite près) vers v.

Donc $\|v\|_q^q = 1$, $\int |f^-|v^q \leq \int |f^-|\eta$ et $\|v\|_2^2 = \lim \|v_i\|_2^2$. Finalement, $v \in \mathscr{A}'(\eta, q)$. Mais, comme $\|\nabla v\|_2 \leq \lim \|\nabla v_i\|_2$, $\|\nabla v\|_2^2/\|v\|_2^2 \leq \lambda'_{f,\eta,q}$ donc $\lambda'_{f,\eta,q}$ est atteint.

De plus $\int |f^-|v^q = \int |f^-|\eta$. En effet si $\int |f^-|v^q < \int |f^-|\eta$, il existe une constante positive a telle que $\int |f^-|(v+a)^q = \int |f^-|\eta$ alors $\|v+a\|_q^q \geq 1$ et

$$\frac{\|\nabla(v+a)\|_2^2}{\|v+a\|_2^2} < \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_2^2} = \lambda'_{f,\eta,q}.$$

Puisque $(v+a)/\|v+a\|_2^2 \in \mathscr{A}'(\eta, q)$, ceci est en contradiction avec la définition de $\lambda'_{f,\eta,q}$.

On a donc montré que $\lambda'_{f,\eta,q}$ et $\lambda_{f,\eta,q}$ sont égaux, donc $\lambda_{f,\eta,q}$ est une fonction décroissante de η, qui est majorée par λ_f pour tout η, et $\lambda_{f,\eta,q}$ est atteint par une fonction de $\mathscr{A}(\eta, q)$, avec $\mathscr{A}(\eta, q) = \{u \in H_1^2/u \geq 0, \|u\|_q^q = 1, \text{ et } \int |f^-|u^q = \eta \int |f^-|\}$.

Pour étudier la convergence de $\lambda_{f,\eta,q}$ lorsque η décroît, on démontre deux lemmes:

Lemme 6. *Soit $q \in]2, N[$ lorsque η tend vers zéro $\lambda_{f,\eta,q}$ tend vers λ_f.*

Démonstration. Puisque $\lambda_{f,\eta,q}$ est atteint par une fonction que l'on notera $v_{\eta,q}$. Lorsque η varie, les $v_{\eta,q}$ forment une suite bornée de H_1^2. En effet, M est de volume 1, et $\|v_{\eta,q}\|_q^q = 1$. Donc $\|v_{\eta,q}\|_2^2 \leq 1$ et $\|\nabla v_{\eta,q}\|_2^2 \leq \lambda_{f,\eta,q} \leq \lambda_f$. Donc, lorsque η tend vers zéro, $v_{\eta,q}$ converge à une sous-suite près faiblement dans H_1^2 vers v_q, fortement dans L_2 et L_q. Par conséquent $\|v_q\|_q^q = 1$, $\int |f^-|v^q = 0$, $v_q \geq 0$, donc $v_q \in \mathscr{A}(\eta, q)$ et $\|v_q\|_2^2 = \lim \|v_{\eta,q}\|_2^2$ d'autre part:

$$\begin{aligned}\|\nabla v_q\|_2^2 &\leq \lim(\lambda_{f,\eta,q}\|v_{\eta,q}\|_2^2)\\ &\leq \lambda_f \lim \|v_{\eta,q}\|_2^2\\ &\leq \lambda_f\|v_q\|_2^2.\end{aligned}$$

Donc $\|\nabla v_q\|_2^2/\|v_q\|_2^2 = \lambda_f$ par définition de λ_f. Ce qui montre que $\lambda_{f,\eta,q}$ tend vers λ_f lorsque q est fixé.

Lemme 7. *Soit $\varepsilon > 0$, il existe η_0 tel que pour tout $\eta < \eta_0$, il existe q_η tel que pour tout $q > q_\eta$, $\lambda_{f,\eta,q} \geq \lambda_f - \varepsilon$.*

Démonstration. On va raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout η_0, il existe $\eta < \eta_0$ et pour tout q_η, il existe une valeur de $q > q_\eta$ telle que $\lambda_{f,\eta,q} < \lambda_f - \varepsilon$.

Soit toujours $v_{\eta,q}$ une fonction qui réalise $\lambda_{f,\eta,q}$, on a $\|v_{\eta,q}\|_q^q = 1$ donc $\|v_{\eta,q}\|_2^2 \leq 1$ et $\|\nabla v_{\eta,q}\|_2^2/\|v_{\eta,q}\|_2^2 = \lambda_{f,\eta,q}$. Ainsi η étant convenablement choisi, il existe une suite de valeurs de q qui tend vers N telle que pour chaque q de cette suite la fonction $v_{\eta,q}$ associée vérifie

$$\frac{\|\nabla v_{\eta,q}\|_2^2}{\|v_{\eta,q}\|_2^2} = \lambda_{f,\eta,q} < \lambda_f - \varepsilon.$$

Ces $v_{\eta,q}$ forment une suite bornée de H_1^2 qui converge faiblement dans H_1^2, fortement dans L_2 vers v_η. On a donc $\|\nabla v_\eta\|_2^2 \leq \liminf \|\nabla v_{\eta,q}\|_2^2$. La convergence forte dans L_2 permet d'affirmer $\|\nabla v_\eta\|_2^2 \leq (\lambda_f - \varepsilon)\int v_\eta^2$, mais l'inégalité de Sobolev $1 \leq (K_1\lambda_f + A_1)\int v_{\eta,q}^2$ implique

$$\int v_\eta^2 \geq \frac{1}{K_1\lambda_f + A_1}.$$

On vérifie alors aisément que $\int v_\eta^N \leq 1$ et $\int |f^-|v_\eta^2 \leq \eta \int |f^-|$. En effet, pour $k < N$ fixé, $\forall q \geq k$

$$\begin{aligned}\int v_{\eta,q}^k \leq 1 \quad \text{et} \quad \int |f^-|v_{\eta,q}^k &\leq \left[\int |f^-|v_{\eta,q}^q\right]^{k/q}\left[\int |f^-|\right]^{1-k/q}\\ &\leq \eta^{k/q}\int |f^-|.\end{aligned}$$

k étant toujours fixé on peut faire tendre q vers N

$$\int v_\eta^k \leq 1 \quad \text{et} \quad \int |f^-| v_\eta^k \leq \eta^{k/N} \int |f^-|.$$

Sur $A = \{x \in M / v_\eta(x) > 1\}$, le lemme de Fatou appliqué à v_η^k et $|f^-|v_\eta^k$ impose $\lim_{k\to N} \int_A v_\eta^k = \int v_\eta^N$ et $\lim_{k\to N} \int_A |f^-|v_\eta^k = \int_A |f^-|v_\eta^N$. Sur $M \backslash A$ la convergence dominée permet de conclure. Faisons maintenant varier η, considérons une suite de valeurs de η qui tend vers zéro, telle que pour chaque η de cette suite, pour tout q_η, il existe une valeur de $q > q_\eta$ telle que $\lambda_{f,\eta,q} < \lambda_f - \varepsilon$. On peut, d'après ce qui précède, associer à chacune de ces valeurs de η une fonction v_η. La suite des fonctions v_η est bornée dans H_1^2 et

$$\int v_\eta^2 \geq \frac{1}{K_1 \lambda_f + A_1}$$

donc lorsque η tend vers zéro, v_η converge faiblement dans H_1^2 et fortement dans L_2 vers v positive et non identiquement nulle, qui vérifie

$$\int |\nabla v|^2 \leq (\lambda_f - \varepsilon) \|v\|_2^2.$$

Mais $0 \leq \int |f^-| v^N \leq \lim_{\eta\to 0} \int |f^-| v_\eta^N \leq \eta \int |f^-|$ implique $\int |f^-| v = 0$. Par conséquent $v \in \mathscr{A}$ et par définition de λ_f, $\int |\nabla v|^2 / \|v\|_2^2 \geq \lambda_f$, ce qui est contradictoire. Autrement dit $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_0$ tel que $\forall \eta < \eta_0$, $\int |\nabla v_\eta|^2 / \|v_\eta\|_2^2 \geq \lambda_f - \varepsilon$.

$$\exists \eta_0 \text{ tel que } \forall \eta < \eta_0 \text{ il existe } q_\eta \text{ tel que } \forall q > q_\eta,\ \lambda_{f,\eta,q} \geq \lambda_f - \varepsilon.$$

Si maintenant $\sup f = 0$ et $\int_{f\geq 0} \mathbf{1} = 0$, λ_f n'est plus défini. On va montrer que l'on obtient l'équivalent des lemmes 6 et 7 en remplaçant λ_f par $+\infty$.

IV.4. Etude de $\lambda_{f,\eta,q}$ dans le cas $\int_{f\geq 0} \mathbf{1} = 0$, $\sup f = 0$. Si $\int_{f\geq 0} \mathbf{1} = 0$ et donc $\sup f = 0$, on peut toujours définir $\lambda_{f,\eta,q}$ pour $\eta \neq 0$. $\lambda_{f,\eta,q} = \inf_{u \in \mathscr{A}(\eta,q)} \|\nabla u\|_2^2 / \|u\|_2^2$, avec $\mathscr{A}(\eta, q) = \{u \in H_1^2 / u \geq 0, \|u\|_q^q = 1$, et $\int |f^-| u^q = \eta \int |f^-|\}$. A η fixé, pour $q \in]2, N[$, $\lambda_{f,\eta,q}$ existe, en effet $\mathscr{A}(\eta, q)$ est non vide puisqu'il existe toujours une fonction u C^∞ telle que $\|u\|_q^q = 1$ dont le support soit inclus dans l'ouvert $\{x \in M, |f^-|(x) < \eta \int |f^-|\}$. La même démonstration que dans le cas $\int_{f\geq 0} \mathbf{1} > 0$, prouve que $\lambda_{f,\eta,q}$ est atteint par une fonction de $\mathscr{A}(\eta, q)$, et que $\lambda_{f,\eta,q}$ décroît lorsque η croît.

On a alors le lemme 8

Lemme 8. *Soit $q \in]2, N[$ lorsque η tend vers zéro $\lambda_{f,\eta,q}$ tend vers l'infini.*

Démonstration. $\lambda_{f,\eta,q}$ est atteint par une fonction que l'on notera $v_{\eta,q}$. Supposons que lorsque η tend vers zéro, on puisse trouver une suite de $v_{\eta,q}$ qui forment une suite bornée de H_1^2.

Lorsque η tend vers zéro, les $v_{\eta,q}$ convergent, à une sous-suite près, faiblement dans H_1^2 vers v_q, fortement dans L_2 et L_q.

Par conséquent, $\|v_q\|_q^q = 1$ et $\int |f^-| v_q^q = 0$. Comme cette dernière égalité entraîne $v_q = 0$ presque partout, elle est contradictoire avec la première. Donc $\lambda_{f,\eta,q}$ tend vers l'infini lorsque η tend vers zéro, à q fixé.

On peut aussi montrer l'équivalent du lemme 7

Lemme 9. *Il existe* η_0 *tel que pour tout* $\eta < \eta_0$, *il existe* q_η *tel que pour tout* $q > q_\eta$ $\lambda_{f,\eta,q} > |\widetilde{R}|$.

Démonstration. On raisonne de nouveau par l'absurde.

Supposons qu'il existe une suite de valeurs de η, $(\eta_j)_{j\in\mathbf{N}}$ qui tende vers zéro, telle qu'il existe $q_j \in]2, N[$ tel que: $\lambda_{f,\eta_j,q_j} \leq |\widetilde{R}|$. λ_{f,η_j,q_j} est atteint par une fonction v_j qui vérifie $\|v_j\|_{q_j}^{q_j} = 1$ et $\|\nabla v_j\|_2^2 \leq \lambda_{f,\eta_j,q_j}$. La suite v_j est donc bornée dans H_1^2, elle converge (à une sous suite près) faiblement dans H_1^2, fortement dans L_2 vers une fonction v.

De plus, toujours à une sous-suite près, quelque soit la limite q des q_j, $q \in [2, N]$, puisque la suite converge faiblement dans L_q, on a:

$$0 \leq \int |f^-|v^q \leq \lim_{j\to\infty} \int |f^-|v_j^{q_j} \leq \eta_j \int |f^-|.$$

Donc $\int |f^-|v^q = 0$, v est presque partout nulle, $\|v\|_2 = 0$. Ainsi $\lim \|v_j\|_2^2 = 0$ et l'inégalité de Sobolev

$$K_1\|\nabla v_j\|_2^2 \geq 1 - A_1\|v_j\|_2^2$$

contredit le fait que λ_{f,η_j,q_j} reste borné.

Ces lemmes établis on peut démontrer la proposition 2.

IV.5. $\mu_{k,q}$ **est positif pour une certaine valeur de** k.

Proposition 2. *Soit* $q \in]2, N[$, *on rappelle,* $\widetilde{R} = \frac{n-2}{4(n-1)}R$.

(a) *Supposons* $\sup f > 0$ *et* $\lambda_f > |\widetilde{R}|$, *il existe* η, *tel que* $\varepsilon = \lambda_{f,\eta,q} + \widetilde{R} > 0$. *On pose*

$$C_q = \frac{\eta}{8}\inf\left(\frac{\varepsilon}{|\widetilde{R}|[A_1 + K_1(|\widetilde{R}| + \varepsilon)]}, 1\right)$$

où A_1 *et* K_1 *sont les constantes de l'inégalité de Sobolev. Si* $\sup f / \int |f^-| < C_q$, *où* C_q *ne dépend que de* $f^- / \int |f^-|$, *alors il existe un intervalle* $I_q = [k_{1,q}, k_{2,q}]$ *tel que* $\forall k \in I_q$, $\mu_{k,q} \geq 0$.

(b) *Si* $\sup f = 0$, *soit* $\int_{f\geq 0} \mathbf{1} = 0$, *soit si* $\int_{f\geq 0} \mathbf{1} \neq 0$, *on suppose* $\lambda_f > |\widetilde{R}|$, *alors il existe un intervalle* $I_q = [k_{1,q}, +\infty[$ *tel que* $\forall k \in I_q$, $\mu_{k,q} \geq 0$.

Démonstration. Si $\sup f > 0$, dans les conditions de la proposition, d'après les lemmes 6 et 8, il existe η, tel que $\varepsilon = \lambda_{f,\eta,q} + \widetilde{R} > 0$.

On suppose que f vérifie les conditions de la proposition. Soit alors u, une fonction de H_1^2, positive ou nulle sur M, telle que: $\|u\|_q^q = k$ avec $k^{(q-2)/q} > 2|\widetilde{R}|/\eta \int |f^-|$. On pose $k_{1,q} = [2|\widetilde{R}|/\eta \int |f^-|]^{q/(q-2)}$.

Deux cas se présentent:

Soit $\int |f^-|u^q \geq \eta k \int |f^-|$. Mais alors, on peut minorer

$$G_q(u) = \|\nabla u\|_2^2 + \widetilde{R}\|u\|_2^2 + \int |f^-|u^q.$$

En effet:

$$\begin{aligned} G_q(u) &\geq \widetilde{R}\|u\|_q^2 + \int |f^-|\eta k \\ &\geq |\widetilde{R}|k^{2/q}\left[\frac{\eta\int|f^-|}{|\widetilde{R}|}k^{1-2/q} - 1\right] \\ &\geq |\widetilde{R}|k^{2/q}. \end{aligned}$$

Soit $\int|f^-|u^q < \eta k\int|f^-|$ mais alors: $\|\nabla u\|_2^2/\|u\|_2^2 > \lambda_{f,\eta,q}$, et on peut minorer $G_q(u)$ ainsi:

$$\begin{aligned} G_q(u) &\geq (\lambda_{f,\eta,q} + \widetilde{R})\|u\|_2^2 + \int |f^-|u^q \\ &\geq \varepsilon\|u\|_2^2 + \int |f^-|u^q. \end{aligned}$$

On pose alors $\alpha + \beta = \varepsilon$, $\alpha = \beta A_1/|\widetilde{R}|K_1$, comme

$$\|u\|_2^2 = \frac{1}{|\widetilde{R}|}[\|\nabla u\|_2^2 + \int |f^-|u^q - G_q(u)]$$

d'après la définition de α et β, on a:

$$G_q(u) \geq \alpha\|u\|_2^2 + \frac{\beta}{|\widetilde{R}|}[\|\nabla u\|_2^2 + \int |f^-|u^q - G_q(u)] + \int |f^-|u^q$$

et donc

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\beta}{|\widetilde{R}|}\right) G_q(u) &\geq \alpha\|u\|_2^2 + \frac{\beta}{|\widetilde{R}|}\|\nabla u\|_2^2 \\ &\geq \frac{\beta}{|\widetilde{R}|}\left[\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\alpha|\widetilde{R}|}{\beta}\|u\|_2^2\right] \end{aligned}$$

par construction $\alpha|\widetilde{R}|/\beta = A_1/K_1$ d'où comme $K_1\|\nabla u\|_2^2 + A_1\|u\|_2^2 \geq \|u\|_q^2 = k^{2/q}$.

$$G_q(u) \geq \frac{\beta}{|\widetilde{R}|}\frac{k^{2/q}}{K_1}\left(1 + \frac{\beta}{|\widetilde{R}|}\right)^{-1}$$

et finalement puisque

$$\beta = \frac{K_1|\widetilde{R}|\varepsilon}{A_1 + K_1|\widetilde{R}|}, \quad G_q(u) \geq \frac{\varepsilon}{A_1 + K_1(|\widetilde{R}| + \varepsilon)}k^{2/q}$$

si $\sup f = 0$, on a $\forall k > k_{1,q}$, $\mu_{k,q} > 0$.
Si $\sup f > 0$, posons

$$m = \inf\left(\frac{\varepsilon}{A_1 + K_1(|\widetilde{R}| + \varepsilon)}, |\widetilde{R}|\right).$$

$F_q(u) = G_q(u) - \int f^+u^q \geq G_q(u) - \sup fk$ et $\forall k > k_{1,q}$, $F_q(u) \geq mk^{2/q} - k\sup f$. On a

$$F_q(u) > \frac{1}{2}mk^{2/q} > 0, \quad \text{si } k < \left[\frac{m}{2\sup f}\right]^{q/(q-2)}.$$

Mais puisque l'on a posé $\sup f \leq \int |f^-| C_q$, avec $C_q = m\eta/8|\widetilde{R}|$, l'inégalité est vérifiée si

$$k < \left[\frac{m}{2\int |f^-| C_q}\right]^{q/(q-2)} = \left[\frac{4|\widetilde{R}|}{\eta \int |f^-|}\right]^{q/(q-2)} = 2^{q/(q-2)} k_{1,q},$$

avec toujours $k_{1,q} = [2|\widetilde{R}|/\eta \int |f^-|]^{q/(q-2)}$. On posera $k_{2,q} = 2^{n/2} k_{1,q}$. Ce qui démontre la proposition.

IV.6. Fin de la démonstration du théorème 1.

Remarque. Lorsque l'on considère une suite de valeurs de q qui tend vers N, la suite des valeurs C_q ne tend pas vers 0; de même si $\sup f = 0$, $k_{1,q}$ ne tend pas vers l'infini et si $\sup f > 0$, $k_{1,q}$ ne tend pas vers $k_{2,q}$, et le sup des $\mu_{k,q}$ ne tend pas vers zéro.

En effet, si on fait tendre q vers N, d'après le lemme 7, on peut choisir une valeur de η, telle que il existe q_η qui réalise pour tout $q > q_\eta$, $\lambda_{f,\eta,q} + \widetilde{R} \geq \varepsilon > 0$. Alors, d'après la proposition 2, si

$$\sup f < C = \frac{\eta}{8} \inf\left(\frac{\varepsilon}{|\widetilde{R}|[A_1 + K_1(|\widetilde{R}| + \varepsilon)]}, 1\right)$$

il existe une suite d'intervalles I_q, dont la longueur ne tend pas vers zéro, tels que pour tout q, $\forall k \in I_q$, $\mu_{k,q} \geq 0$.

Pour tout $q \in]q_\eta, N[$, que f prenne des valeurs positives ou non, on a donc montré que sous les hypothèses du théorème, il existe toujours un intervalle $[l_q, l'_q]$ tel que $\forall k \in [l_q, l'_q]$, $\mu_{k,q} > 0$. l_q et l'_q dépendent de f et de q, mais pour une fonction f donnée lorsque q tend vers N, $l'_q - l_q$ ne tend pas vers zéro, en effet on peut choisir l_q tel que $l_q \to l = [2|\widetilde{R}|/\eta \int |f^-|]^{n/2}$ et $l'_q \to 2^{n/2} l$. De plus, d'après la démonstration précédente, si $\sup f > 0$, en posant $\mu_{k_0,q} = \sup_{k \in \mathbb{R}^+} \mu_{k,q}$, il est clair que lorsque q tend vers N, $\mu_{k_0,q}$ ne tend pas vers zéro. On pose alors

$$\mu_{k_q,q} = \inf_{u \in \mathscr{D}_{k,q}} F_q(u)$$

avec

$$\mathscr{D}_{k,q} = \{u \in H_1^2, u \geq 0, \|u\|_q^q \leq l'_q\}$$

$\mu_{k_q,q}$ est atteint pour une fonction u_q qui satisfait $\|u_q\|_q^q = k_q$ et $F_q(u_q) = \mu_{k_q,q}$. $\mu_{k,q}$ étant négatif lorsque k est proche de zéro, $\mu_{k_q,q} < 0$. On en déduit que k_q est inférieur à l_q, donc à l'_q, puisque $\forall k \in [l_q, l'_q]$, $\mu_{k,q} > 0$.

u_q est donc un point critique de la fonctionnelle et les théorèmes de régularité montrent qu'alors u_q est une solution C^∞ de l'équation (2). Comme il apparaît clairement dans la démonstration de la proposition 2, les u_q sont majorés dans L_q.

En effet puisque $k_q < k_{1,q} = [2|\widetilde{R}|/\eta \int |f^-|]^{q/(q-2)}$ on a $k_q < C'$ avec

$$C' = \sup\left[1, \left[\frac{2|\widetilde{R}|}{\eta \int |f^-|}\right]^{q/n}\right].$$

Les u_q sont des fonctions strictement positives (Aubin [3, Proposition 3.75]). Ces fonctions vérifient:

$$\Delta u_q + \widetilde{R} u_q = \frac{q}{2} f u_q^{q-1}.$$

Ainsi lorsque u_q est minimale $\Delta u_q \leq 0$ et par conséquent

(a) lorsque en un point P de M u_q est minimale $f(P) < 0$.

(b) $f(P) u_q^{q-1}(P) \leq \frac{2}{q} \widetilde{R} u_q(P)$ donc

$$u_q^{q-2}(P) \geq \frac{2}{q} \frac{\widetilde{R}}{f(P)} \geq \frac{2}{N} \frac{\widetilde{R}}{\inf f} > 0.$$

Ainsi les u_q sont uniformément minorées par $m' > 0$. Il reste à montrer que les $\mu_{k_q, q}$ sont uniformément bornés pour $q \in [q_\eta, N]$. D'une part $\mu_{k_q, q} < 0$, d'autre part

$$\begin{aligned}\mu_{k_q, q} &\geq \widetilde{R} k_q^{2/q} - \sup f k_q \geq \widetilde{R} C'^{2/q} - \sup f C' \\ &\geq (\widetilde{R} - \sup f) C', \qquad \text{car } \frac{2}{q} < 1.\end{aligned}$$

On en déduit que la suite u_q est bornée dans H_1^2. En effet

$$\begin{aligned}\|u_q\|_2^2 \leq C'^{2/q}, \quad \text{et} \quad \|\nabla u_q\|_2^2 &\leq \mu_{k_q, q} + \int f u_q^q - \widetilde{R} \|u_q\|_2^2 \\ &\leq \sup f C'.\end{aligned}$$

A une sous-suite près, u_q converge alors faiblement dans H_1^2 vers une fonction u, l'inclusion compacte de H_1^2 dans L_2 et l'unicité de la limite faible impliquent alors la convergence vers u des u_q dans L_2 et presque partout.

Par ailleurs pour tout $q \in [q_0, N]$:

$$\int \nabla u_q \nabla v + \widetilde{R} \int u_q v - \frac{q}{2} \int f u_q^{q-1} v = 0, \quad \forall v \in H_1^2.$$

La convergence faible dans H_1^2 et forte dans L_{N-1} impliquent

$$\int \nabla u \nabla v + \widetilde{R} \int u v - \frac{N}{2} \int f u^{N-1} v = 0, \quad \forall v \in H_1^2.$$

Donc u satisfait faiblement l'équation

$$\Delta u + \widetilde{R} u = \frac{N}{2} f u^{N-1}. \tag{1}$$

Les théorèmes de régularité assurent qu'alors u est C^∞ et la convergence presque partout des u_q vers u entraîne $u(x) \geq m'$ pour tout $x \in M$, u est une solution non triviale de l'équation (1).

V. Démonstration du théorème 2

On suppose ici $\sup f > 0$, et $(\sup f^+)/\int |f^-| < C$. Dans les conditions du théorème on a vu qu'il existe un intervalle I_q, tel que si $k \in I_q$, $\mu_{k,q}$ soit positif. Par ailleurs, pour k proche de zéro $\mu_{k,q}$ est négatif, de même que lorsque k tend vers l'infini.

On en déduit que $\mu_{k,q}$ possède un minimum et un maximum. Le minimum (relatif) est atteint, on l'a montré, par une fonction solution de l'équation (1). Pour montrer que l'on obtient une autre solution, on utilise le lemme du col.

Lemme 10. *La condition de Palais-Smale est vérifiée.*

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite de fonctions v_n telle que $F(v_n)$ tend vers une limite finie C, $F(v_n)$ tend vers zéro et v_n tend vers l'infini en norme H_1^2.

On a donc pour tout ξ dans H_1^2:

$$\begin{cases} \int \nabla v_n \nabla \xi + \widetilde{R} \int v_n \xi - \frac{q}{2} \int f v_n^{q-1} \xi = \varepsilon \|\xi\|, \\ \int |\nabla v_n|^2 + \widetilde{R} \int v_n^2 - \int f v_n^q \to C, \end{cases}$$

où $\|\ \|$ désigne la norme dans H_1^2. Donc en particulier pour $\xi = v_n$.

$$\begin{cases} \int |\nabla v_n|^2 + \widetilde{R} \int v_n^2 - \frac{q}{2} \int f v_n^q = \varepsilon \|v_n\|, \\ \int |\nabla v_n|^2 + \widetilde{R} \int v_n^2 - \int f v_n^q \to C. \end{cases}$$

On en déduit $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 / \forall n > N_0$

$$\begin{cases} \left|\left(\frac{q}{2} - 1\right) \int f v_n^q - C\right| \le \varepsilon + \varepsilon \|v_n\|, \\ \left|\left(\frac{q}{2} - 1\right) \left[\int |\nabla v_n|^2 + \widetilde{R} \int v_n^2\right] - \frac{q}{2} C\right| \le \frac{q}{2}\varepsilon + \varepsilon \|v_n\|. \end{cases}$$

Soit alors k une norme L_q telle que $\mu_{k,q}$ soit positif. On pose $w_n = k^{1/q} \frac{v_n}{\|v_n\|_q}$, on a alors

$$\begin{cases} \left|\left(\frac{q}{2} - 1\right) \int f w_n^q - \frac{kC}{\|v_n\|_q^q}\right| \le \frac{k\varepsilon}{\|v_n\|_q^q} + \varepsilon \frac{\|w_n\|}{\|v_n\|_q^{q-1}}, \\ \left|\left(\frac{q}{2} - 1\right) \left[\int |\nabla w_n|^2 + \widetilde{R} \int w_n^2\right] - \frac{q}{2} \frac{k^{2/q} C}{\|v_n\|_q^2}\right| \le \frac{q}{2} \frac{k^{2/q}\varepsilon}{\|v_n\|_q^2}\Bigg| + k^{1/q} \varepsilon \frac{\|w_n\|}{\|v_n\|_q}. \end{cases}$$

Puisque $\|w_n\|_2^2$ est bornée, la deuxième équation entraine que w_n est une suite bornée de H_1^2. Mais alors, si $\|v_n\|_q$ tend vers l'infini, les deux équations ci-dessus entraînent $F(w_n) \to 0$. Par ailleurs, comme $\|w_n\|_q^q = k$, on a $F(w_n) \ge \mu_{k,q}$, et donc $\mu_{k,q} \le 0$ mais on a choisi k de telle sorte que $\mu_{k,q} > 0$, on obtient donc une contradiction. Une telle suite est donc bornée dans H_1^2. Puisque $q < N$, les inclusions de Sobolev sont compactes, on en déduit que la condition de Palais-Smale est vérifiée.

Soit k_0 la norme telle que $\mu_{k_0,q}$ soit maximum. Soient k_1 et k_2 des normes telles que

$$\mu_{k_1,q} = 0; \quad k_1 < k_0,$$
$$\mu_{k_2,q} = 0; \quad k_2 > k_0.$$

Soient

$$\Gamma \in \{h \in C([0, 1], H_1^2) / h(0) = u_{k_1,q}, h(1) = u_{k_2,q}\}$$

et

$$\mu_q = \inf_{h \in \Gamma} \max_{y \in [0,1]} F_q(h(y)).$$

Si μ_q n'était pas un niveau critique, il existerait ε, inférieur à $\mu_q/2$, tel que $F_q^{-1}\{[\mu_q - \varepsilon, \mu_q + \varepsilon]\}$ ne contienne pas de point critique.

Mais alors, en reprenant la démonstration d'Ambrosetti-Rabinowitz [1], il existerait η_t, $t \in [0, 1]$, continue en t, de H_1^2 dans H_1^2, vérifiant:

(1) $\eta_0(u) = u$, $\forall u \in H_1^2$.

(2) $\eta_t(u) = u$, $\forall u \in H_1^2$, $u \notin F_q^{-1}\{[\mu_q - \varepsilon, \mu_q + \varepsilon]\}$.

(3) η_t est un homéomorphisme de H_1^2.
(4) $F_q(\eta_t(u)) \leq F_q(u)$, $\forall u \in H_1^2$.
(5) $\eta_1(\{u/F_q(u) \leq \mu + \varepsilon\})$ est inclus dans $\{u/F_q(u) \leq \mu_q - \varepsilon\}$.

Soit alors un chemin $h \in \Gamma$ tel que $\max_{y\in[0,1]} F_q(h(y)) < \mu_q + \varepsilon$. Comme $F_q(u_{k_1,q}) \leq \mu_q - \varepsilon$ et $F_q(u_{k_2,q}) \leq \mu_q - \varepsilon$,

$$\eta_1(u_{k_1,q}) = u_{k_1,q} \quad \text{et} \quad \eta_1(u_{k_2,q}) = u_{k_2,q}.$$

Donc $\eta_1(h) \in \Gamma$ mais $\max_{y\in[0,1]} F_q(\eta_1(h(y))) \leq \mu_q - \varepsilon$ ce qui serait une contradiction.

On en déduit que μ_q est un niveau critique de la fonctionnelle, comme par ailleurs on a $\mu_q \geq \mu_{k_0,q} > 0$, il s'ensuit que l'équation (2) admet deux solutions distinctes non nulles.

Bibliographie

1. A. Ambrosetti et P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.
2. Th. Aubin, *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl **55** (1976), 269–296.
3. ——, *Nonlinear analysis on manifolds—Monge-Ampère equations*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, vol. 252, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
4. J. L. Kazdan et F. W. Warner, *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. Differential Geom. **10** (1975), 113–134.
5. J. L. Kazdan, *Prescribing the curvature of a Riemannian manifold*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., no. 57, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985; reprinted with corrections 1987.
6. T. Ouyang, *On the positive solutions of semilinear equations* $\Delta u + \lambda u + hu^p = 0$ *on compact manifolds.* II, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 1083–1141.
7. A. Rauzy, *Courbure scalaire prescrite*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **316** (1993), 273–276.
8. ——, *Multiplicité pour un problème de courbure scalaire prescrite* (à paraître).
9. J. L. Vazquez et L. Véron, *Solutions positives d'équations elliptiques semi-linéaires sur des variétés riemanniennes compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. **312** (1991), 811–815.

16 rue des Saints Pères, Paris 75007, France
E-mail address: `rauzy@mathp6.jussieu.fr`